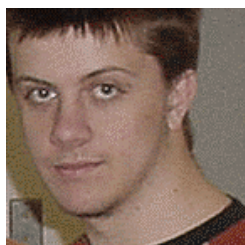




Le Chaos



Une étude effectuée par:

Omar Mokhtari
Simon Fortin
Samuel Thiboutot-Rioux
Michel Serafin, Simon Paradis
Frédéric Foster

Une collaboration entre élèves de Sciences de la Nature du Cégep de Rimouski et des élèves de l'Institut Universitaire de Technologie de Paris-Sud a accouché d'un devoir de vulgarisation sur la théorie du Chaos.

Ce projet vise à augmenter l'intérêt des jeunes pour les sciences et de les réunir «à distance» autour d'un travail d'équipe. «À l'ère de la communication et des échanges, il est très utile que les élèves soient mis en contact avec d'autres types d'enseignement. Cela leur donne une vue plus objective de leurs connaissances et accroît leur ouverture d'esprit», pense d'ailleurs Roselyne Escarras, Chargée de projet du Carrefour des Sciences et des Technologies de l'Est du Québec.

L'expérience de cette année semble avoir été fort appréciée et devrait être reprise l'an prochain, avec davantage d'équipes. Et peut-être la participation d'élèves d'autres pays.

Ce projet a été coordonné par Norbert Verdier, professeur agrégé de mathématiques de l'Université Paris-Sud et par Philippe Etchecopar, professeur de mathématiques au Cégep de Rimouski.

Nous vous encourageons à communiquer vos commentaires à l'adresse suivante : toilescientifique@sciencepourtous.gc.ca. Ils seront archivés sur le site et transmis aux élèves.

Bonne lecture

Pour tout autre renseignement, communiquez avec :
Roselyne Escarras, Chargée de Projet
Carrefour des Sciences et des Technologies de l'Est du Québec
Tél : (418) 723-1880, poste 2420
60 rue de l'Évêché Ouest, Bureau F120,
Rimouski G5L 4H6
Courriel : r_escarras@hotmail.com



LE CHAOS

Si l'on demande à une personne au hasard de nous définir ce que représente le chaos pour elle, elle pourrait dire que cela rime avec « absence de règle ». Prenons un dictionnaire et voyons ce qu'il en dit.

« Vient du mot grec *Khaos* signifiant « abîme ». Le chaos est l'état primordial du monde caractérisé par une confusion de tous les éléments et par l'absence de l'ordre. »

Au VIII^e siècle avant J.C., dans la cosmogonie du poète grec Hésiode, le chaos est la personnification de l'espace vide situé entre le Ciel et la Terre qui se constitua avant toute chose. Après l'apparition de deux autres êtres primordiaux, la Terre (Gaïa) et l'Amour (Eros), le chaos engendra les Ténèbres des Enfers (Erèbe) et la Nuit (Nyx).

Comme nous pouvons le voir, le chaos est un terme qui a déjà une histoire. Pourtant, il advient que depuis un quart de siècle environ et depuis 1975 pour être précis, la dénomination de « chaos », introduite par Li et Yorke, trouve une nouvelle signification relative à l'instabilité de ses conséquences et qui bouleverse les esprits les plus géniaux depuis déjà plus d'un siècle.

La notion de chaos relevant donc d'un contexte historique, nous devons en premier lieu nous intéresser aux origines du chaos avant de nous focaliser sur un exemple révélateur, puis nous verrons que le chaos se retrouve finalement dans beaucoup de domaines différents.



Les origines de la notion de chaos



Isaac Newton
(1642 - 1727)

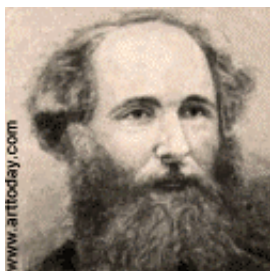
Nous sommes le 25 décembre 1642 alors que le monde voit naître « le plus grand génie de tous les temps et de tous les pays » selon François Arago. Il s'agit d'Isaac Newton connu pour ses lois classiques de la mécanique céleste et pour sa fameuse histoire avec la pomme (probablement une invention). Selon ces lois, qui ont été publiées dans les *Philosophiae naturalis principia mathematica* en 1687, le système solaire est un ensemble stable dans lequel la position de chaque planète peut être prédite à partir de sa position et de sa vitesse à un instant donné.

En d'autres termes, les conditions initiales permettraient de déterminer l'état futur et antécédent d'un système considéré, la chose ayant été rendue possible grâce à la mise en place d'une nouvelle technique mathématique, le calcul différentiel. Nous en venons donc à une notion des plus importantes : le déterminisme.

Ces révélations sur la dynamique des solides ont influencé un grand nombre d'éminents physiciens et mathématiciens. Si le système de Newton ne considérait que deux corps, dès que l'on envisage un système plus complexe, le système solaire complet par exemple, la difficulté s'en trouve accrue et des pages et des pages de calcul sont nécessaires avant d'arriver à un résultat. Ainsi, Lagrange, Laplace, Le Verrier font partie de ceux qui vont affiner les connaissances sur le mouvement des planètes.



Un siècle après Isaac Newton, Pierre Simon de Laplace (1749-1827), fervent admirateur de ce dernier, écrivait ceci : « *Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de ce qui va suivre* » (*Essai philosophique sur les probabilités* (1795)). Comme ses contemporains, il était persuadé du bien-fondé du déterminisme. Nous n'affirons en aucun cas que le déterminisme n'existe pas mais, comme nous allons le voir, il faut nuancer la notion de prédictibilité absolue.



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

Un écossais du nom de James Clerk Maxwell (1831-1879) va révolutionner le monde de la physique en général et de l'électromagnétisme en particulier. En 1876, dans son livre intitulé « *Matter and Motion* », il réfute l'idée laplacienne selon laquelle « *les mêmes conditions produisent toujours les mêmes effets* ». En effet, cela suppose que des conditions considérées à un moment et en un lieu différents soient exactement les mêmes, ce qui est impossible. Ainsi, ce que Maxwell nous dit, c'est qu'il faut considérer deux états différents : un état stable et un état instable. Et pourtant, si cela nous paraît être logique, ce ne fut pas le cas à l'époque. Les mathématiciens et les physiciens faisaient abstraction des considérations d'instabilité car le phénomène tendrait alors vers le désordre, chose que les scientifiques ne pouvaient pas concevoir.

Il fallut attendre la fin du XIX^e siècle avant d'avoir de nouveaux éléments. Célèbre mathématicien, Henri Poincaré (1854-1912) travaille sur le problème dit des « *trois corps* » (« *L'analyse et la recherche* » (1890)). Il s'agit tout simplement de considérer trois corps comme l'ensemble 'Terre, Lune, Soleil'. Plutôt que d'étudier le mouvement de ces astres, il cherche à déterminer l'ensemble des mouvements susceptibles d'être reproduits par le système. Alors que le système à « *deux corps* » semble simple et rejoint parfaitement la théorie, le système à « *trois corps* » révèle certains aspects jusque là non considérés. En effet, Poincaré montre que si l'on étudie le système sur une durée assez longue, alors les trajectoires ne sont plus du tout comparables aux simples sections coniques comme les paraboles et autres hyperboles que nous connaissons. Ainsi, on ne peut pas affirmer que sur une durée moindre, les trajectoires sont absolues mais seulement qu'elles sont approximatives. Cela nous amène à la notion de temps dit temps de *Liapounov*, qui correspond à la durée à partir de laquelle la prévision se révèle impossible, et la notion de temps caractéristique qui correspond au temps au bout duquel deux mouvements initialement semblables s'écartent notablement. De plus, intervient une autre idée, celle de sensibilité aux conditions initiales. Maxwell affirmait que deux conditions initiales ne peuvent pas être identiques. Poincaré montre que si l'on considère une légère différence (approximation) sur les conditions initiales, cette différence se trouve amplifiée de manière exponentielle après un certain temps à tel point que la trajectoire devient imprévisible. Par exemple, considérons le système solaire. Il est possible de montrer que sur une échelle des temps de l'ordre du millier d'années, nous pouvons considérer que le système solaire est stable. Maintenant, si l'on considère une échelle des temps de l'ordre du million d'années, alors rien ne va plus. Grâce à l'arrivée des ordinateurs et de



Dossier spécial

leur formidable puissance de calcul (mais tout de même limitée par leur mémoire), il a été montré que le système solaire est instable. Pour illustrer la chose, si l'on considère la position de la Terre à 50 mètres près, au bout d'une centaine de millions d'années, cet écart serait de 500 millions de kilomètres. Ainsi, on dira que le système solaire est chaotique à l'échelle de millions d'années.

Maintenant que nous avons été familiarisés avec la notion appelée « chaos » au travers de l'histoire des sciences depuis Newton, il serait intéressant d'en voir une représentation des plus évocatrices et que l'on connaît sous le nom d'effet papillon.

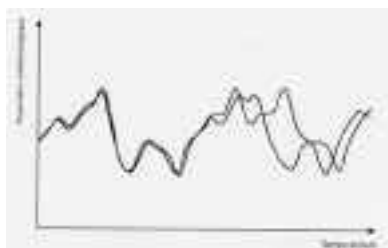
Comme nous venons de le voir, la théorie du chaos a été introduite par Maxwell et appuyée par Poincaré. Pourtant, seul un petit nombre de physiciens et de mathématiciens s'intéressent au problème « d'instabilité ». Jusqu'à l'intervention de Edward Lorenz.



La météorologie ou la représentation parfaite d'un système chaotique

Tout le monde sera d'accord si nous affirmons que la prévision météorologique est une des choses les plus complexes qui soit. Comparée au système solaire comportant fondamentalement peu d'éléments (soleil et planètes) et régi par la loi de gravitation, la météorologie semble dépendre d'une multitude de facteurs. Pour prévoir le temps qu'il fera chez nous, il faut connaître celui qui prévaut dans une autre zone géographique comme l'Afrique. Il faut tenir compte de la température, de la pression, de l'hydrométrie, du relief et de beaucoup d'autres paramètres. Ces mêmes facteurs sont liés par des relations physiques et donc par des équations mathématiques très complexes nécessitant une puissance de calcul que les ordinateurs vont permettre de soulager même si les scientifiques en demandent de plus en plus. Mais la difficulté à prévoir le temps ne vient pas que du problème des mathématiques.

Dans les années 60, Edward Lorenz, physicien de son état, travaillait au Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.). Il était spécialisé dans la prévision météorologique. Lors de ses recherches, il est parvenu à simplifier les modèles mathématiques utilisés pour prédire le temps. En effet, de tous les facteurs intervenant sur les conditions météorologiques, il décida de n'en retenir qu'une douzaine, les plus révélateurs à ses yeux, et d'en tirer un système de douze équations différentielles simples mais tout aussi instables que le modèle complet. Mais il faut préciser que ce système n'est utilisable qu'à des fins expérimentales, car nécessitant peu de temps de calcul, et non pour prévoir avec certitude le temps qu'il fera demain, même si des ressemblances notables étaient observées. Pourtant, une première observation attira l'œil de l'expert. Au-delà de quelques jours, les prévisions devenaient totalement erronées et imprévisibles.



Au cours de l'hiver de l'année 1961, Lorenz voulut reprendre un calcul qu'il avait réalisé la veille. Reprenant des valeurs régurgitées par l'ordinateur, il s'attendait à juste titre à retrouver les résultats obtenus précédemment. Et pourtant, ce ne fut pas le cas et c'est à partir de ce jour que la théorie du chaos devint une sorte de mode. En effet, le début du calcul fournissait des résultats comparables au premier mais très vite, ces derniers divergeaient totalement.



Dossier spécial

L'explication vient du fait que l'ordinateur de Lorenz utilisait six chiffres significatifs pour le calcul mais les résultats affichés étaient tronqués à trois chiffres seulement. Donc, lorsque Lorenz réinjecta les valeurs trouvées la veille, elles n'étaient que des approximations des valeurs réelles.

Lorsqu'en 1963 Lorenz publia un article sur ce qu'il avait montré, il ne fut pas vraiment remarqué. Il fallut attendre une dizaine d'années pour que retentisse l'écho de cette redécouverte. En effet, lors d'une session de l'Association Américaine pour l'Avancement de la Science consacrée au « Programme de Recherche Global sur l'Atmosphère », Lorenz introduit ce qui sera le maître mot de la théorie du chaos : l'effet papillon ou l'idée que le battement d'ailes d'un papillon au Brésil qui peut une tornade au Texas. Cela réaffirme la tendance de certains systèmes à l'instabilité et également leur sensibilité aux conditions initiales qu'avait déjà introduit Poincaré plus d'un demi-siècle auparavant.



Lorenz a donc tiré une croix sur l'idée d'un déterminisme absolu et par la même occasion, il a ouvert les yeux à ceux qui ne juraient que par Newton. Cela ne signifie pas que Newton a fait une erreur et que tout le monde est tombé dans le piège. Seulement, il faut peser ses mots et prendre en considération qu'au-delà d'un certain temps, la prévision devient impossible et que par conséquent nous sommes en présence d'un déterminisme relatif.



Le chaos : une notion omniprésente

Depuis que Poincaré a essayé d'attirer l'attention des scientifiques sur cette notion de sensibilité aux conditions initiales et que l'instabilité de certains systèmes, l'effet papillon de Lorenz va changer la vie de nombreuses personnes.

Le chaos envahit notre vie. Prenons par exemple le domaine de la biologie et plus particulièrement l'écologie. Considérons le modèle de Robert May, physicien de Princeton devenu biologiste, pour simuler l'évolution d'une espèce biologique. On considère une population qui croît proportionnellement à λ . On aura alors une équation du type :

$$N_{t+1} = \lambda \cdot N_t$$

N_t correspond à la population à la fin d'une année, N_{t+1} à celle de l'année suivante et $\lambda > 1$.

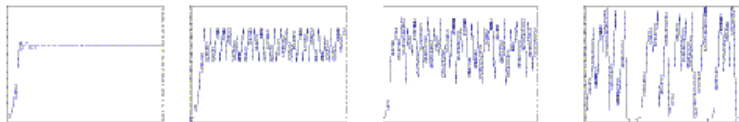
Si l'on considère un modèle plus réaliste (prenant en compte les pertes : prédateur par exemple), on aura cette seconde équation :

$$N_{t+1} = \lambda \cdot N_t \cdot (1 - N_t)$$

Prenons différentes valeurs de λ et voyons ce qui se passe après un certain nombre d'itérations (nous laissons à la charge des lecteurs de bien vouloir vérifier par eux-mêmes les résultats que nous allons énoncer).

- ② $1 < \lambda < 3$: le système converge
- ② $\lambda > 3$: le système se met à osciller et plus on s'éloigne de la valeur limite 3, plus le système devient imprévisible

Les graphiques suivants montrent bien ce que nous affirmons.



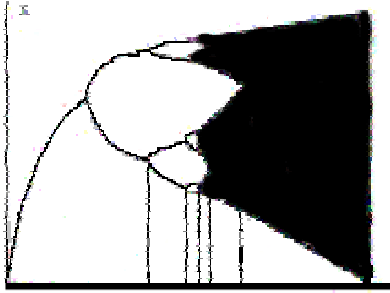


Diagramme de bifurcation

Cette autre représentation, bien connue du « monde chaotique », permet de voir l'évolution de l'instabilité en fonction du paramètre.

Plus impressionnant : le rythme chaotique du battement du cœur. Richard Cohen, physicien et cardiologue, a montré lors d'une simulation sur son ordinateur qu'un dédoublement de période du rythme cardiaque entraîne un enchaînement irrémédiable de contractions musculaires chaotiques qui se conclut par l'arrêt cardiaque. Cette simulation fut même confirmée par le physiologiste Léon Glass lors d'une expérience sur des cellules de cœur de poulet.

Mais tout cela reste dans le domaine des sciences pures. Cependant, les phénomènes chaotiques ne sont pas réservés à ce seul domaine. D'autres domaines tels que l'économie ou la sociologie comportent des systèmes chaotiques, sensibles aux conditions initiales. Des chercheurs tels que Blake LeBaron ou Mark Michaels ont permis de mettre cela en évidence.

Nous pouvons retenir ici que la théorie du chaos touche des domaines divers et qui sont donc tous sensibles aux conditions initiales.

« Abîme », « ténèbres », « apocalypse », « désordre ». Tant de synonymes du mot chaos. En voici depuis 1975 un nouveau ou plutôt une nouvelle définition : « sensibilité aux conditions initiales ».

Comme nous l'avons vu, la théorie du chaos a été introduite il y a plus d'un siècle déjà par Maxwell et surtout Poincaré, même si elle ne portait pas encore ce nom. Et pourtant, ce n'est que depuis un quart de siècle, depuis que Lorenz introduisit, sans le préméditer, cette appellation « effet papillon », que le monde scientifique et même celui de l'économie et de la sociologie s'y intéressent de près.

Pourquoi tant de retard, alors que l'engouement d'aujourd'hui est si grand ?

L'histoire nous permet de sentir les choses. Avec Newton et Laplace, le rêve d'un déterminisme absolu s'est répandu comme une traînée de poudre. Ainsi, pendant longtemps, ce rêve a été entretenu et nombre de scientifiques y ont cru dur comme fer. Alors, lorsque l'on est venu leur dire que leur déterminisme n'était que relatif, ils n'ont pas voulu y croire. Aujourd'hui, la « pilule est passée ».



Dossier spécial

Et pourquoi « chaos » ? Peut-être tout simplement parce que Li et Yorke, comme beaucoup de personnes, même aujourd'hui, n'arrivaient pas à comprendre cette notion d'instabilité due à la sensibilité aux conditions initiales. Et pour traduire cette incompréhension, ils ont choisi le terme de « chaos » dans leur article. Mais, comme pour « l'effet papillon », ce sont les médias qui ont répandu ce terme que l'on utilise à outrance.

La théorie du chaos a ouvert une nouvelle voie de recherche comme l'avait fait la théorie de la relativité ou la mécanique quantique. On en trouve de plus en plus d'applications et la source est loin de se tarir.